Banque <<Agro>>
Technologie et Biologie
A - 0804 T

MATHÉMATIQUES 2
Durée : 3 heures
L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Première partie :

Deux tireurs A_1 et A_2 disputent un match selon les règles suivantes :
A_1 et A_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce qu'un des deux la touche.
A_1 tire en premier.

Pour $i \in \{1,2\}$, le tireur A_i touche la cible avec la probabilité $p_i \in]0,1[$ supposée constante et on note $q_i = 1 - p_i$; les tirs sont indépendants. On numérote les tirs à partir de 1 ; on remarquera que A_1 tire à des rangs impairs.

I.1.a. Montrer que A_1 l'emporte au rang $2n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec une probabilité de $p_1(q_1.q_2)^n$.

I.1.b. Montrer que A_2 l'emporte au rang $2n+2$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec une probabilité de $q_1p_2(q_1.q_2)^n$.

I.1.c. Pour $i \in \{1,2\}$, on note G_i l'évènement " A_i l'emporte ".
Montrer que $P(G_1) = p_1 \sum_{n=0}^{+\infty}(q_1.q_2)^n$ et que $P(G_2) = q_1p_2 \sum_{n=0}^{+\infty}(q_1.q_2)^n$.
I.1.d. Montrer que $P(G_1) = \dfrac{p_1}{1-q_1.q_2}$ et $P(G_2) = \dfrac{q_1p_2}{1-q_1.q_2}$. Calculer $P(G_1)+P(G_2)$ et en déduire que la probabilité de l'évènement : " Le match dure indéfiniment " est nulle.

I.2.a. On dira que le match est équitable si $P(G_1) = P(G_2)$; montrer que ceci est réalisé si et seulement si $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$. Que peut-on dire si $p_1 > \frac{1}{2}$?

I.2.b. Etudier la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ et représenter sommairement son graphe.

I.2.c. On considère la variable aléatoire T : "Nombre de tirs effectués jusqu'à la fin du match".
Déterminer sa loi de probabilité et montrer que son espérance vaut $E(T) = \dfrac{2-p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$

I.2.d. Donner l'espérance de T en fonction de p_1 dans le cas où le match est équitable.

T.S.V.P.

Deuxième partie :

On généralise la situation à c tireurs, $A_1, A_2, \ldots, A_c$ pour $c \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ils disputent le match selon les mêmes règles :

$A_1, A_2, \ldots, A_c$ tirent successivement sur la cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche.
A_1 tire en premier, A_2 tire éventuellement en second, et ainsi de suite.

Pour $i \in \{1, \ldots, c\}$, le tireur A_i touche la cible avec la probabilité $p_i \in]0, 1[$, supposée constante et on note $q_i = 1 - p_i$. Les tirs sont indépendants. On numérote les tirs à partir de 1 ; on remarquera que A_i ne peut tirer qu'aux rangs $cn + i$, pour $n \in \mathbb{N}$.

II.1.a. Montrer que pour tout entier naturel n le tireur A_1 l'emporte au rang $cn + 1$ avec une probabilité égale à $p_1(q_1 \cdots q_c)^n$.

II.1.b. Montrer que pour tout entier naturel n et pour $i \in \{2, \ldots, c\}$ le tireur A_i l'emporte au rang $cn + i$ avec une probabilité égale à $p_i(q_1 \cdots q_{i-1})(q_1 \cdots q_c)^n$.

II.1.c. Pour $i \in \{1, \ldots, c\}$, on note G_i l'évènement "A_i l'emporte" et $\pi(i) = \prod_{j=1}^{j=i} q_j$.

Par convention, on posera $\pi(0) = 1$.

Montrer que $P(G_1) = p_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(c)^n$ et que pour $i \in \{2, \ldots, c\}$ on a :

$$P(G_i) = p_i \pi(i-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(c)^n.$$

II.1.d. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, c\}$, on a $P(G_i) = \dfrac{p_i \pi(i-1)}{1 - \pi(c)}$.

II.1.e. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{i=c} P(G_i) = 1.$$

Indication : On pourra vérifier que, pour $i \in \{1, \ldots, c\}$, on a : $p_i \pi(i-1) = \pi(i-1) - \pi(i)$.

II.2.a. On dira que le match est équitable si $P(G_1) = P(G_2) = \cdots = P(G_c)$.

Montrer que ceci est réalisé si et seulement si $\forall i \in \{1, \ldots, c-1\}$, $p_i \neq 1$ et $p_{i+1} = \dfrac{p_i}{1 - p_i}$.

Que peut-on dire si $p_1 > \frac{1}{c}$?

On suppose dans la suite de cette partie que le jeu est équitable.

II.2.b. On suppose dans cette question que $p_1 = \frac{1}{c}$; montrer que $p_c = 1$. En déduire que le jeu s'arrête en au plus c tirs.

II.2.c. Pour tout $i \in \{1, \ldots, c\}$, on note $u_i = \dfrac{1}{p_i}$. Exprimer, pour $i \in \{1, \ldots, c-1\}$, u_{i+1} en fonction de u_i et en déduire, pour $i \in \{1, \ldots, c\}$, u_i à l'aide de u_1. Montrer enfin que

$$\forall i \in \{1, \ldots, c\}, \quad p_i = \frac{p_1}{1 - (i-1)p_1}.$$

II.2.d. Montrer que $\pi(c) = 1 - cp_1$.

II.3.a. On considère la variable aléatoire T :

"Nombre de tirs effectués jusqu'à la fin du match ".

Déterminer sa loi de probabilité en fonction de p_1.
Indication : on examinera d'abord le cas $p_1 = \frac{1}{c}$ et on remarquera dans le cas général que $\forall i \in \{1, \ldots, c\}$, $p_i \pi(i-1) = p_1$.

II.3.b. Montrer que dans tous les cas l'espérance de T vaut $E(T) = \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{c-1}{2}$.

Troisième partie.

Dans cette partie entrent en lice une suite illimitée $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tireurs. Le match se déroule selon les mêmes règles :

$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tirent successivement sur la cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche.
A_1 tire en premier, A_2 tire éventuellement en second, et ainsi de suite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le tireur A_n touche la cible avec la probabilité $p_n \in]0, 1[$; on note $q_n = 1 - p_n$. Les tirs sont indépendants. On numérote les tirs à partir de 1 ; on remarquera que chaque joueur ne peut tirer au plus qu'une fois. On conserve les notations de la deuxième partie.

III.1.a. Montrer que la probabilité de l'évènement G_n : "A_n gagne ". vaut $\pi(n-1)p_n$.

III.1.b. On note G l'évènement : " L'un des joueurs gagne ". Exprimer la probabilité que le jeu se poursuive indéfiniment à l'aide de $P(G)$.

III.1.c. Montrer que la série de terme général $\pi(n-1)p_n$ est convergente et que sa somme est un réel λ, inférieur ou égal à 1.

III.2.a. On étudie dans cette question la suite de terme général $\pi(n)$. Montrer que cette suite est décroissante et positive. En déduire qu'elle admet une limite, qu'on notera par la suite a.

III.2.b. Montrer que $\lambda = 1 - a$.
Indication : On remarquera que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(G_n) = \pi(n-1) - \pi(n)$.

III.2.c. Montrer que si a est non nul alors q_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. La réciproque est-elle vraie ?
Indication : on examinera le cas de la suite de terme général : $q_n = \dfrac{n}{n+1}$.

T.S.V.P.

III.3.a. Déterminer λ si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p_n = p \in]0,1[$.

III.3.b. On suppose dans cette dernière question que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p_n = \frac{1}{(n+1)^x}$; montrer que $\pi(n) = \frac{n+2}{2(n+1)}$. En déduire $P(G_n)$ puis $P(G)$.

FIN.